TD n°25 : Extremum et fonctions convexes

Exercice 1. Recherche de minimum

Soit f une fonction de classe C^4 sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f'(a) = f''(a) = f^{(3)}(a) = 0 \text{ et } f^{(4)}(a) > 0.$$

Montrer que f admet un minimum local en a.

Exercice 2. Sens de convexité

Etudier le sens de convexité des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$a(x) = -x^3 + 6x^2 - 7 \quad b(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x} \quad f_\lambda(x) = \lambda e^x + x^2 \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. Convexité et composée

1. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application convexe et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une application.
   (a) Montrer que si $\ln(f)$ est convexe alors f est convexe.
   (b) On suppose que $f \in C^2(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\ln(f) \text{ est convexe sur } \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x)\, f''(x) \geq (f'(x))^2.$$

Exercice 4. Convexité simultanée

1. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2. On définit

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array} \qquad h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\, f(x) \end{array}$$

   Montrer que g est convexe si et seulement si h est convexe.
2. En déduire le sens de convexité de la fonction $x \mapsto x \ln(x)$.

Exercice 5. Monotonie et convexité

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ convexe et majorée. Montrer que f est constante.
2. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ convexe et majorée.
   (a) Déterminer si f est nécessairement constante.
   (b) Montrer que f est décroissante.

Exercice 6. Cordes et tangentes

Montrer les inégalités suivantes (une représentation graphique peut vous aider).

1. Pour $x > 0$,
$$\ln(x) \leq x - 1.$$
2. Pour $x \in [0, 1]$,
$$e\, x \leq e^x \leq 1 + (e-1)x.$$
3. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
$$\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x.$$
4. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$,
$$x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0.$$
5. Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $x \neq 0$,
$$\frac{\tan(x)}{x} \geq 1.$$

Exercice 7. Recherche des points d'inflexion

Soit la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Déterminer les points d'inflexion de la courbe représentative de f.

Exercice 8. Inégalité de convexité

1. Montrer que la fonction suivante est convexe

$$f :]1, +\infty[\begin{array}{ccc} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\ln(\ln(x)) \end{array}$$

2. En déduire que pour $(x, y) \in]1, +\infty[^2$, on a

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)}\sqrt{\ln(y)}.$$

Exercice 9. Inégalité de convexité (2)

1. Montrer que la fonction suivante est convexe

$$f :]0, +\infty[\begin{array}{ccc} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln(x) \end{array}$$

2. En déduire que pour $x \in]0, 1[$, on a

$$x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) \geq -\ln(2).$$

3. Montrer que pour x, y, a, b quatre réels strictement positifs,

$$x\ln\left(\frac{x}{a}\right) + y\ln\left(\frac{y}{b}\right) \geq (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right).$$

Exercice 10. Inégalité de Hölder

On considère deux réels $p > 1$ et $q > 1$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

1. (a) Montrer en utilisant la concavité de la fonction logarithme que pour $x > 0$ et $y > 0$,

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

   (b) Quel résultat retrouve-t-on quand $p = q = 2$?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère des réels strictement positifs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

   (a) Montrer que pour $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{x_j y_j}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}\frac{x_j^p}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)} + \frac{1}{q}\frac{y_j^q}{\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)}.$$

   (b) En déduire l'inégalité

$$\sum_{j=1}^n x_j y_j \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

   Dans le cas $p = q = 2$, on trouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.